

コロナの感染挙動について

飯田逸夫

1. 初めに

この文章が出るころ日本ではコロナ収束宣言が出て人々が安心して一杯のみに繰り出しているのか、それとも現在アフリカからヨーロッパにかけて流行が広がっているオミクロンの流行が日本にも押し寄せて大流行になっているかはわからないが、コロナの流行の数理的モデルの可能性について考えてみた。

2. SIR, SIER モデル

コロナの感染モデルについては 2020 年の 1 月に出口さんがこの触媒懇談会ニュースに SIR モデルを取り上げてそのモデルでの計算結果を出されている。SIR モデルでは免疫をもたない者(susceptible)と感染者(infectious)との接触から出発し、感染者が中間体的になり、これを経て回復者

recovered/removed) へと移り変わっていくと考えるものである。出口さんもかかっているように、これは $A+B \rightarrow C$ の二次反応の挙動と同様のものとなる。さらに SIR の改良版で SEIR (susceptible, exposed, infectious, recovered)モデルというのもあり、これは SIR モデルに感染してから、感染性を持つまでの待ち時間の exposed のグループを加えたものである。ⁱ なお感染モデルには改良のアイデアがいろいろあり得て、当今ではプレプリントサーバーに毎日アップされる数理分析論文は空前の量だそうである。ⁱⁱ

3. 流行の挙動

東京都の毎日の感染者数は下の Fig. 1 のようになっている。

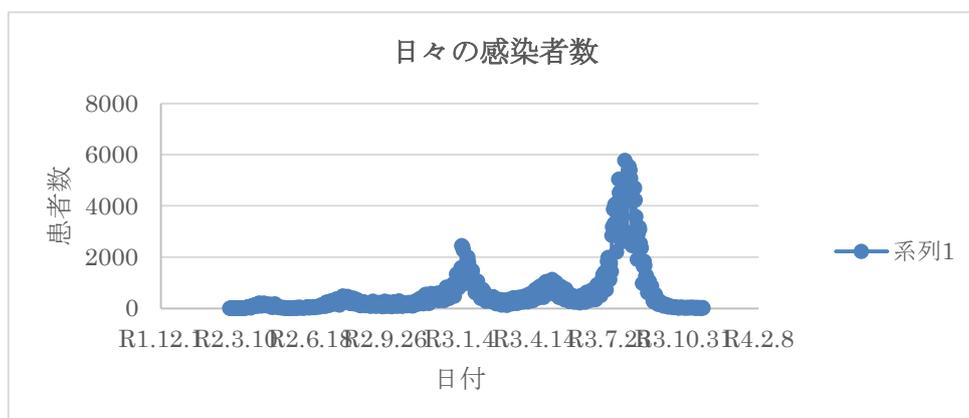


Fig. 1 東京における日々の感染者数

ただしこのグラフの感染者数その日に感染が登録された人数であって、現に存在する感染者の数ではない。Fig. 1 よりこれまでに見出された感染者数のピークが過去に5つあったことがわかる。2020年4月、8月、2021年1月、5月、8月である。そして感染人数の上下について、人出の多さとか、ワクチンの接種率とか、Social Distance 確保とかの効果による理由付けは試みられているし、感染者数120日周期説というもある。しかしなぜ120日の周期があるのかの説明がないとのこと。iii 感染者数に波が出てくる理由がよくわからない“、と多くの人も感じているのではないだろうか。

4. 感染者数の自己相関係数

感染者数に特異的な挙動があるかどうか

見るのに、自己相関係数がある。ある時間の関数 $x(t)$ について時刻 t の $x(t)$ と、時刻 $t + \tau$ の $x(t + \tau)$ の積をつくり、一連の時刻 t について平均をとると τ についての関数 $\phi(\tau)$ が得られるのでこれを調べるのである。

$$\phi(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} \quad (1)$$

具体的に自己相関係数の計算は以下の式で算出した。

$$r_\tau = \frac{\sum_{t=\tau+1}^T (y_t - \bar{y})(y_{t-\tau} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2} \quad (2)$$

もしある日のデータと τ 日後のデータに何も相関がないなら r_τ は τ によらずほぼゼロになるし、 τ 日の周期性があるなら、 τ のところにピークがあらわれるはずである。 τ を20日までの範囲と短くとした場合のグラフを Fig. 2 に示す。

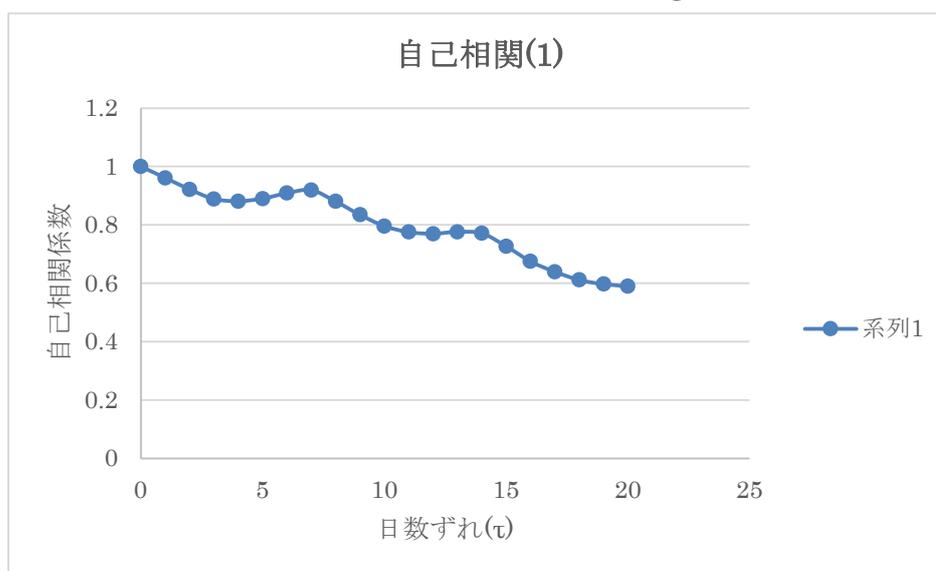


Fig. 2 自己相関係数 ; $\tau \leq 20$

これによると7日と14日にピークが認められる。すなわち7日の倍数の周期性が窺われる。これはすなわち曜日依存性で、データを見る限り月曜日は少なく、木曜、金曜、土曜がかすかに高め、日曜がやや少なくなる傾向がある。コロナ自身の性質に由来す

る挙動というより社会的な事情による挙動と考えられる。たとえば月曜日は前日、前々日が休日で月曜に結果が出るサンプル数が少ない、といった事情があるとされている。7の倍数の周期は Fig. 1 のグラフからは間隔が細かすぎて見えない。

自己相関の範囲を 160 日までに広げたものを Fig. 3 に示す。

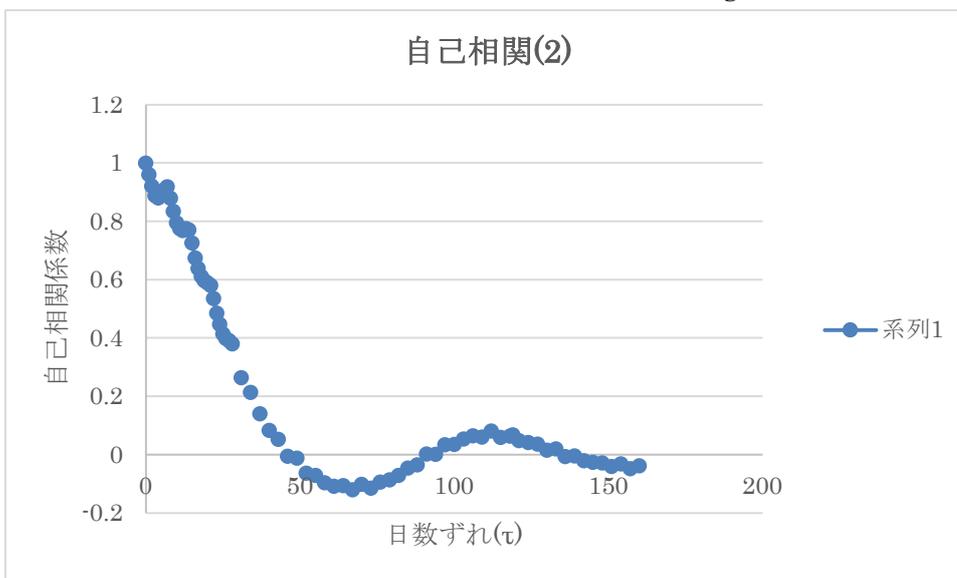


Fig. 3 自己相関係数 : $r \leq 160$

このグラフでは 7 日と 14 日のピークの他に 70 日付近に負の弱い相関、120 日に弱い正の相関がある。起点から 70 日後の感染者数は起点の感染者数よりかすかに減っていることになる。これの意味はわからない。120 日を中心とする幅広がりピークは Fig.1 で感染者数のピークとしてでている繰り返りを反映しているのであろうか。

5. 感染モデル

SEIR モデルにおいては成分の増減は次の式で表せる。

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) \quad (3)$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \varepsilon E(t) \quad (4)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \varepsilon E(t) - \gamma I(t) \quad (5)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \quad (6)$$

(3)は免疫を持たない者 S が感染力のある感

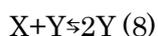
染者 I と接触して減少していくことに対応、(4)は非感染性感染者 E が(3)の機構で生成するとともに、感染力のある感染者になることにより減少することに対応している。そして(5)は感染力のある感染者 I が、非感染性の感染者が感染性を獲得することにより増えるとともに、回復者 R として出て減っていくことに対応している。これではしかし変化は S から終点 R に向かい、中間体の単発的増大はあっても複数のピークが出る話にはならない。

3. Lotka-Volterra モデル

さて感染数に複数ピークが出てくるが、これが周期的なものなのか、あるいはウィルスの株の交代によりそれぞれが独立なピークとして偶発的に出てくるのかはわからない。ピークの観測データが沢山あるならば、ある時間区間で区切って、その期間中に発生するピークの数ポアソン分布をするなら偶発的だと推定できるが、Fig. 1 程度のデータではその検証は難しい。

今、周期的挙動が起こると考えるならば、化学反応系にそうしたものがあり、対応させられるかもしれないと考える。ここで易しいモデルは Lotka-Volterra のモデルである。これは生物の捕食者-被捕食者関係による両者の個体数の変動を表現するものである。これをコロナ感染に適用しようとした研究は残念ながらネットでは見つけることはできなかった。さらに言えば複数のピークの生成機構についての提案も見つけれなかった。文献を十分に探せていないのかもしれないが...

化学反応の Lotka-Volterra モデルは以下の反応系で考えられる。iv



系は $A \rightarrow E$ へと進んでいるが A 、 E は一定に保たれている。このためには A や E は考えている感染系よりはるかに大きいとすればよい。ここで(7)-(9)の逆反応を無視し、 dX/dt 、 dY/dt を次のように書く。

$$\frac{dX}{dt} = k_1AX - k_2XY \quad (10)$$

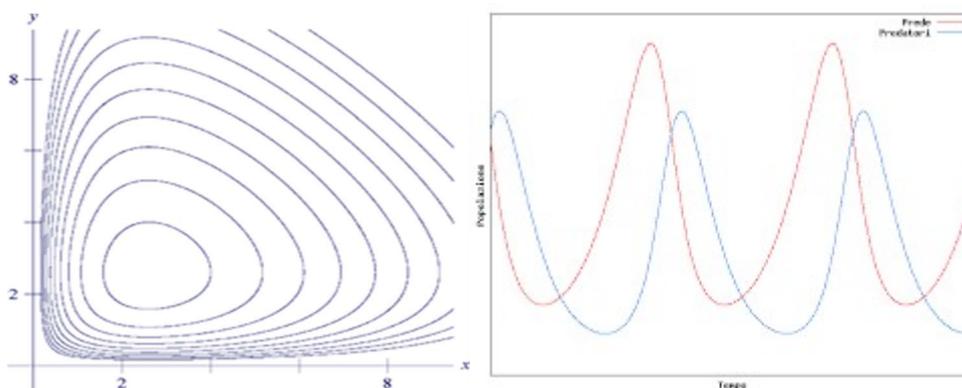


Fig. 4 Lotka-Volterra の捕食者 Y と非捕食者 X の数量関係(左)と、それぞれの経時変化 (右) 青が捕食者、赤が非捕食者

$$\frac{dY}{dt} = k_2XY - k_3Y \quad (11)$$

これらの辺々割って dt を消去すると次に示す(12)を得る。

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{Y(k_2X - k_3)}{X(k_2Y - k_1A)} \quad (12)$$

これは変数分離型の微分方程式で、容易に積分できて

$$k_2X + k_2Y - k_1A \ln Y - k_3 \ln X = H \quad (13)$$

となる。 H は積分定数である。(13)は与えられた H の値に対する定常解の周囲を周回する閉曲線の集合をあたえる。

X を捕食者、 Y を被捕食者とした時、その個体数の変動がこの Lotka-Volterra のモデルで説明でき、 X 、 Y の動きは Fig.4 の左図のようになる。そして X と Y の個体数の経時変化はこのサイクルをたどると Fig. 4 の右図のような繰り返しのピークとして出てくる。v

なお Fig. 4 左図の一つの閉曲線にある系の状態は、微小の摂動に対してももとの軌道に戻る性質はなく、ずれたらずれたところで閉曲線をたどる。

5. A、X、Yの意味づけ

あと必要なのは式を構成しているA、X、Yに意味づけを与えることである。初めに式を考えてあとからそれに意味をこじつけようというのだから乱暴ではある。

Aは免疫を持たないグループで、圧倒的大きな集団で全体の中で濃度は下がらないとする。(最近免疫を持つだろうと思われる人が増えているはずで、モデルに修正が必要である。)次にXとYがあるが、感染者には2種あると考える。Xが通常の感染性を持つ感染者であり、免疫を持たないAを感染者Xにする。この感染力のあるXは感染力のない感染状態のものYとぶつかって自

身がYとなる。Yは回復するなどして系から除かれる。

このモデルなら一応くり返しのピークを持つ感染症にはなってくれる。感染した人に二種あるというだけならSEIRのモデルでも出てくるが、このモデルのまま流用とはいかずかなり苦しい説明となっている。

現在(12月初旬)は8月に一日5000人を超えた感染者数が一日20人以下とかなり少なくなっている。ここに述べた議論だとFig. 4の原点に近いところにいる。だからこれから第六波がくるなら思い切り感染者の多い状態がでてくることになる。

ⁱ 鈴木、西浦、日本内科学会雑誌、109(11)、p2276 (2020)

ⁱⁱ <https://www.covid19-jma-medical-expert-meeting.jp/topic/3925>

ⁱⁱⁱ たとえば <https://www.tokyo-np.co.jp/article/142916>

^{iv} グランスドルフ、プリゴジン、“構造・安定性・ゆらぎ その熱力学的理論”、1977

^v Wikipedia ロトカ・ヴォルテラの方程式から